ZESTAW III

① (A) Pokazać, że zbiór domknięty w przestrzeni zwartej jest zwarty.

(B) Niech $K_0, K_1, \ldots$ będą zbiorami zwartymi w przestrzeni Hausdorffa $(X, \mathcal{T})$ takimi, że każdy zbiór otwarty zawierający K_0 zawiera prawie wszystkie zbiory K_n. Wykazać, że suma $\bigcup_{n=0}^{\infty} K_n$ jest zbiorem zwartym.

② Wykazać, że w przestrzeni $(\mathbb{R}^2, d_r)$ opisanej w Zestawie I, zad. 2, zbiór K jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest domknięty i leży w pewnym zbiorze $[a,b] \times \{0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \{s_n\} \times [-t_n, t_n]$, gdzie $s_n \in [a,b]$ i $t_n \to 0$.

③ Niech $(X \times Y, \mathcal{T})$ będzie iloczynem przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T}_X)$ i przestrzeni zwartej $(Y, \mathcal{T}_Y)$. Wykazać, że rzut zbioru domkniętego w iloczynie $X \times Y$ na X jest zbiorem domkniętym w $(X, \mathcal{T}_X)$ (twierdzenie Kuratowskiego).

④ Niech $f_1 \geqslant f_2 \geqslant \ldots \geqslant 0$ będzie ciągiem funkcji ciągłych $f_i : X \to [0, +\infty)$ na przestrzeni zwartej $(X, \mathcal{T})$, zbieżnym punktowo do zera, $f_i(x) \to 0$, dla $x \in X$. Wykazać, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje k takie, że $f_k(x) < \varepsilon$, dla $x \in X$ (twierdzenie Diniego).

Wskazówka. Zauważyć, że zbiory $f_i^{-1}([0,\varepsilon))$, $i = 1, 2, \ldots$, pokrywają X.

⑤ (A) Niech $f\colon X \to Y$ będzie przekształceniem ciągłym przestrzeni Hausdorffa $(X, \mathcal{T}_X)$ na przestrzeń zwartą $(Y, \mathcal{T}_Y)$ takim, że warstwy $f^{-1}(y)$, $y \in Y$, są zwarte i obraz każdego zbioru domkniętego w X jest zbiorem domkniętym w Y. Pokazać, że X jest przestrzenią zwartą.

(B) Wyprowadzić z (A) i Zad. 3, że iloczyn skończenie wielu przestrzeni zwartych jest przestrzenią zwartą.

(C) Pokazać, że kwadrat leksykograficzny $(I^2, \mathcal{T}(\prec))$ jest przestrzenią zwartą.

6 Dla $A \subset (0, +\infty)$, niech $X(A)$ będzie sumą odcinków domkniętych na płaszczyźnie euklidesowej $(\mathbb{R}^2, d_e)$ łączących punkt $(-1, 0)$ z punktami $(a, \frac{1}{a})$, $a \in A$. Wykazać, że domkniętość zbioru $X(A)$ na płaszczyźnie jest równoważna zwartości zbioru A i jest równoważna zwartości zbioru $X(A)$.

7 Niech $A \subset \mathbb{R}$ i $T \subset [0, 1]$ będą zbiorami zwartymi na prostej euklidesowej. Pokazać, że zbiór $C = \{ta + (1-t)b : \ a, b \in A, \ t \in T\}$ jest zwarty.

8 Niech $O(a, b)$ będzie okręgiem na płaszczyźnie, którego średnicą jest odcinek o końcach $a, b \in \mathbb{R} \times \{0\}$. Dla $A \subset \mathbb{R} \times \{0\}$ przyjmijmy $O(A) = A \cup \bigcup \{O(a, b) : a, b \in A, a \neq b\}$. Wykazać, że $O(A)$ jest zbiorem zwartym na płaszczyźnie euklidesowej wtedy i tylko wtedy, gdy A jest zwarte.

9 Niech $S(a, t) = \{x \in \mathbb{R}^n : d_e(a, x) = t\}$ będzie sferą w przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}^n, d_e)$ o środku w a i promieniu t. Dla $A \subset \mathbb{R}^n$ i $r : A \to (0, +\infty)$, przyjmijmy $S(A) = \bigcup\{S(a, r(a)) : a \in A\}$. Wykazać, że jeśli A jest zbiorem zwartym i r jest funkcją ciągłą, to $S(A)$ jest zbiorem zwartym w $(\mathbb{R}^n, d_e)$.

10 (A) Wykazać, że w przestrzeni funkcyjnej $(C[0, 1], d_{sup})$ każda kula o promieniu r zawiera zbiór nieskończony, którego każde dwa punkty są odległe o $\frac{r}{2}$.

(B) Wykazać, że w przestrzeni $(C[0, 1], d_{sup})$ zbiory zwarte mają puste wnętrze.

11 Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią zwartą, niech $U \subset X$ będzie zbiorem otwartym i $f : U \to [0, 1]$ funkcją ciągłą. Pokazać, że zbiór $\{(x, t) : x \in U \text{ i } t \leqslant f(x)\} \cup (X \setminus U) \times [0, 1]$ jest zwarty w iloczynie kartezjańskim przestrzeni $(X, \mathcal{T})$ i odcinka euklidesowego.

12 Niech X będzie dowolnym zbiorem nieskończonym, $a \in X$ i niech $\mathcal{T}_X$ będzie rodziną zbiorów $U \subset X$ takich, że $X \setminus U$ jest zbiorem skończonym, lub $a \notin U$.

(A) Wykazać, że przestrzeń $(X, \mathcal{T}_X)$ jest zwarta.

(B) Wykazać, że jeśli $f : X \to Y$ jest przekształceniem ciągłym przestrzeni $(X, \mathcal{T}_X)$ na przestrzeń Hausdorffa $(Y, \mathcal{T}_Y)$, to istnieje ciągłe $g : Y \to X$ takie, że $f \circ g(y) = y$ dla $y \in Y$.

13 (A) Niech $X = [0, 1) \cup \{a_0, a_1\}$, gdzie $a_0 \neq a_1$ są punktami spoza przedziału $[0, 1) \subset \mathbb{R}$ i niech $\mathcal{B}$ będzie rodziną zbiorów postaci $(s, t) \cap [0, 1)$ lub $(t, 1) \cup \{a_i\}$, $s < t < 1$, $i = 0, 1$. Sprawdzić, że $\mathcal{B}$ jest bazą generującą pewną topologię $\mathcal{T}$ w X, z każdego otwartego pokrycia przestrzeni $(X, \mathcal{T})$ można wybrać pokrycie skończone, ale przestrzeń $(X, \mathcal{T})$ nie jest Hausdorffa.

(B) Określić topologie $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ w X takie, że przestrzenie $(X, \mathcal{T}_i)$ są zwarte i metryzowalne, oraz $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ jest topologią określoną w (A).

14 Niech (X, d) będzie zupełną przestrzenią metryczną. Wykazać, że jeśli $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ są niepustymi zbiorami domkniętymi i A_n jest sumą skończenie wielu zbiorów o średnicach $\leqslant \frac{1}{n}$, to przecięcie $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ jest niepuste i zwarte.

Wskazówka. Dowodząc, że $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$, określić ciąg zbiorów domkniętych $F_1 \supset F_2 \supset \ldots$ taki, że $F_n \subset A_n$, $\operatorname{diam} F_n \leqslant \frac{1}{n}$ i F_n przecina każdy zbiór A_i, $i = 1, 2, \ldots$

15 Pokazać, że dla każdej metryzowalnej przestrzeni ośrodkowej X istnieje zwarta przestrzeń metryzowalna Z i przekształcenie $\varphi: X \to Z$ takie, że $\varphi: X \to \varphi(X)$ jest homeomorfizmem i $\overline{\varphi(X)} = Z$.

Wskazówka. Ustalić na X metrykę $d \le 1$ generującą topologię X, zbiór $\{a_1, a_2, \dots\}$ gęsty w X i rozpatrzyć przekształcenie $\varphi: X \to [0,1] \times [0,1] \times \dots$, $\varphi(x) = (d(x,a_1), d(x,a_2), \dots)$.

16 (A) Niech F będzie zbiorem domkniętym, ograniczonym na prostej euklidesowej $\mathbb{R}$ takim, że dla każdego nietrywialnego przedziału $(a,b) \subset \mathbb{R}$, $(a,b) \setminus F \neq \emptyset$ i przecięcie $(a,b) \cap F$ jest albo puste, albo nieskończone (takie zbiory będziemy nazywać zbiorami Cantora). Pokazać, że F jest homeomorficzne z $\{0,1\} \times \{0,1\} \times \dots$

Wskazówka. Indukcyjnie ze względu na n określić przedziały domknięte $I(d_1, d_2, \dots)$, $d_j \in \{0,1\}$ takie, że $I(d_1, \dots, d_{n-1}, 0) \cap I(d_1, \dots, d_{n-1}, 1) = \emptyset$, $\operatorname{diam} I(d_1, \dots, d_n) < 2^{-n} (\operatorname{diam} F + 1)$, $F \subset \bigcup \{ I(d_1, \dots, d_n) : (d_1, \dots, d_n) \in \{0,1\}^n \}$, $I(d_1, \dots, d_n, d) \subset I(d_1, \dots, d_n)$, a następnie rozpatrzyć $f: \{0,1\} \times \{0,1\} \times \dots \to \mathbb{R}$ określone formułą $\{f(d_1, d_2, \dots)\} = \bigcap_n I(d_1, \dots, d_n)$.

(B) Pokazać, że każda zwarta przestrzeń metryczna jest ciągłym obrazem zbioru Cantora.

Wskazówka. Dla przestrzeni zwartej (X,d) określić zbiory domknięte $F(t_1, \dots, t_n)$, $t_j \in T_j$, $|T_j| = 2^{n_j}$ tak, żeby $\operatorname{diam} F(t_1, \dots, t_n) \le \frac{1}{n}$, $X = \bigcup_{t \in T_1} F(t)$, $F(t_1, \dots, t_n) = \bigcup_{t \in T_{n+1}} F(t_1, \dots, t_n, t)$, a następnie rozpatrzyć przekształcenie $f: T_1 \times T_2 \times \dots \to X$ określone formułą $\{f(t_1, t_2, \dots)\} = \bigcap_n F(t_1, t_2, \dots, t_n)$.

17 Niech $(\beta\mathbb{N}, \mathcal{T}_\beta)$ będzie przestrzenią ultrafiltrów na zbiorze liczb naturalnych $\mathbb{N}$.

(A) Pokazać, że jeśli $a_n \to a_0$ w przestrzeni $\beta\mathbb{N}$ (tzn. każde otoczenie a_0 zawiera prawie wszystkie a_n), to $a_n = a_0$ dla prawie wszystkich n.

Wskazówka. Założyć, że tak nie jest, korzystając z własności Hausdorffa określić zbiory otwarte $U_1, U_2, \ldots$ w $\beta\mathbb{N}$ takie, że $U_i \cap U_j = \emptyset$ dla $i \neq j$, $a_{n_i} \in U_i$, $n_1 < n_2 < \ldots$, a następnie rozpatrzyć przedłużenie ciągłe na $\beta\mathbb{N}$ funkcji charakterystycznej zbioru $\mathbb{N} \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} U_{2i}$.

(B) Niech $I_t = [0,1]$, $t \in \mathbb{R}$. Pokazać, że istnieje funkcja ciągła przestrzeni $\beta\mathbb{N}$ na iloczyn kartezjański $(\prod_{t\in\mathbb{R}} I_t, \mathcal{T}_\Pi)$ (w szczególności, $\beta\mathbb{N}$ ma $2^{2^{\aleph_0}}$ punktów).

Wskazówka. Ustalić w $\prod_{t\in\mathbb{R}} I_t$ przeliczalny zbiór gęsty S (zob. Zestaw II, zad. 16) i rozpatrzyć ciągłe przedłużenie na $\beta\mathbb{N}$ funkcji z $\mathbb{N}$ na S.

---

18 Niech $(\prod_{s\in\mathbb{R}} D_s, \mathcal{T}_\Pi)$ będzie iloczynem kartezjańskim przestrzeni dwupunktowych $D_s = \{0,1\}$ z topologią dyskretną i niech $(X, \mathcal{T}_\Pi | X)$ będzie podprzestrzenią tego iloczynu złożoną z punktów $x \in \prod_{s\in\mathbb{R}} D_s$, których nośnik $\{s : x(s) \neq 0\}$ jest przeliczalny.

Pokazać, że w przestrzeni $(X, \mathcal{T}_\Pi | X)$ z każdego ciągu punktów można wybrać podciąg zbieżny, ale przestrzeń X nie jest zwarta.

19

Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną. Odstęp między rozłącznymi zbiorami $A, B \subset X$ określamy formułą $\mathrm{dist}(A,B) = \inf\{d(a,b) : a \in A, b \in B\}$.

(A) Pokazać, że jeśli A jest domknięty w X, a B zwarty i rozłączny z A, to $\mathrm{dist}(A,B) > 0$.

(B) Znaleźć dwa rozłączne domknięte podzbiory A, B płaszczyzny euklidesowej takie, że $\mathrm{dist}(A,B) = 0$.

(C) Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną bez punktów izolowanych. Wykazać równoważność następujących warunków:

(i) (X,d) jest przestrzenią zwartą,

(ii) dla każdego pokrycia $\mathcal{U}$ przestrzeni X zbiorami otwartymi w (X,d) istnieje $\delta > 0$ takie, że każda kula $B(a,\delta)$ leży w pewnym elemencie $\mathcal{U}$,

(iii) każda funkcja ciągła $f : X \to \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła na (X,d),

(iv) odstęp między każdą parą rozłącznych zbiorów domkniętych A, B w (X,d) jest dodatni.

20

(A) Wykazać, że dla każdej zwartej przestrzeni metrycznej (X,d), przestrzeń funkcji ciągłych $(C(X), d_{sup})$ zanurza się izometrycznie w przestrzeń funkcji ciągłych na zbiorze Cantora z metryką supremum.

Wskazówka. Skorzystać z Zadania 16(B).

(B) Wykazać, że dla zwartej przestrzeni metrycznej (X,d), przestrzeń funkcji ciągłych $(C(X), d_{sup})$ jest ośrodkowa.

Wskazówka. Podać najpierw uzasadnienie w przypadku gdy X jest zbiorem Cantora, a następnie skorzystać z (A).

21

(A) Niech $f : A \to Y$ będzie funkcją jednostajnie ciągłą, określoną na podzbiorze A przestrzeni metrycznej (X, d_X) i przyjmującą wartości w zupełnej przestrzeni metrycznej (Y, d_Y). Wykazać, że funkcję f można przedłużyć do funkcji jednostajnie ciągłej $\overline{f} : \overline{A} \to Y$ na domknięcie zbioru A.

(B) Niech $U \subset \mathbb{R}$ będzie zbiorem otwartym i ograniczonym na prostej euklidesowej. Wykazać, że zbiór $\mathcal{F}$ funkcji różniczkowalnych $f : U \to [-1,1]$ takich, że $|f'(t)| \leqslant 1$ dla $t \in U$, ma domknięcie zwarte w przestrzeni funkcyjnej $(C_b(U,\mathbb{R}), d_{sup})$ z metryką supremum.

Wskazówka. W przestrzeni $(C(\overline{U},\mathbb{R}), d_{sup})$ rozpatrzyć zbiór przedłużeń funkcji $f \in \mathcal{F}$ na domknięcie zbioru U.

22

Niech $X \subset \mathbb{R}^n$ będzie zwartym podzbiorem przestrzeni euklidesowej i niech $(\Gamma(X), d_{sup})$ będzie przestrzenią przekształceń $T : X \to X$ zachowujących odległość między punktami, z metryką supremum. Pokazać, że przestrzeń $(\Gamma(X), d_{sup})$ jest zwarta.